

بررسی پایداری و طراحی کنترل‌کننده GPC برای فرآیندهای خطی غیرحداقل فاز ناپایدار با مقاوم‌سازی محاسبات عددی

محمد حائری^(۲)

مهدی یعقوبی^{(۱)*}

(۱) دانشجویی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

(۲) استاد، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ثبت اولیه: ۸۵/۱۲/۱۳، تاریخ دریافت نسخه اصلاح شده: ۸۶/۰۶/۱۰، تاریخ پذیرش: ۸۶/۸/۲

چکیده در این مقاله روش‌های پایدارسازی کنترل‌کننده‌های پیش‌بین برای طیف وسیعی از فرآیندهای خطی ناپایدار (از جمله فرآیندهای ناپایدار با قطب‌های تکراری و غیرتکراری سمت راست، حداقل فاز و غیرحداقل فاز) مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که پایداری برخی از فرآیندهای ناپایدار (غیرحداقل فاز با قطب‌های تکراری ناپایدار) با روش‌های موجود از این خانواده، با وجود برآورده شدن شرایط تعیین شده، به دست نمی‌آید. نشان می‌دهیم که یکی از علل آن، ill-condition بودن مسئله بهینه‌سازی تعریف شده است. دلیل دیگر آن است که برای فرآیندهای ناپایدار با قطب‌های تکراری، محدودیت‌های سخت و نرم روش‌های پایدارکننده نمی‌تواند پایداری سیستم را تضمین کند. برای حل آن و تحقق پایداری ابتدا رابطه بین ضرایب وزنی تابع هزینه و دو موضوع فوق را به دست می‌آوریم. سپس ضرایب وزنی ورودی‌ها در تابع هزینه را برای حل مشکل اول و همچنین ضرایب وزنی جملات خروجی در تابع هزینه را برای حل مشکل دوم به دست می‌آوریم. با مثال‌های مختلف نشان می‌دهیم که با این روش می‌توان پایداری حلقه‌بسته یک فرآیند ناپایدار حداقل و غیرحداقل فاز با قطب‌های تکراری سمت راست را تضمین نمود.

واژه‌های کلیدی پایداری، ضرایب وزنی متغیر، کنترل‌کننده پیش‌بین، GPC

*عهده دار مکاتبات

نشانی: دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد- دانشکده فنی و مهندسی - گروه برق

تلفن: ۰۵۱۱-۶۶۳۲۴۶۵، پست الکترونیکی: yaghobi@mshdiau.ac.ir

۱- مقدمه

روش های موجود پایدار نمی شوند اعمال می کنیم و نشان می دهیم که پایداری به دست می آید.

۲- کنترل کننده GPC

چنانچه اغتشاش موجود در فرآیند از نوع غیر ایستار باشد مدل ARIMAX می تواند برای بیان رفتار آن مطابق رابطه (۱) مورد استفاده قرار گیرد.

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \Delta u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} e(t), \quad \Delta = 1 - q^{-1} \quad (1)$$

حال اگر خروجی های آینده فرآیند را بر حسب ورودی های آینده و گذشته آن تنظیم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} y(t+j) &= G_j \Delta u(t+j-1) + f(t+j), & (2) \\ j &= 1, 2, \dots, P \\ f(t+j) &= \frac{H_j}{C} \Delta u(t-1) + \frac{F_j}{C} y(t), \\ C &= \Delta A E_j + q^{-j} F_j, \\ B E_j &= C G_j + q^{-j} H_j \end{aligned}$$

اگر خروجی ها و ورودی های آینده و همچنین گذشته سیستم را به صورت بردار در نظر بگیریم، رابطه (۳) حاصل می شود که در آن بردار \hat{y} خروجی های آینده، بردار f شامل اثرات ورودی و خروجی های گذشته، بردار u مربوط به ورودی های آینده و G ماتریسی است که سطرهای آن G_j می باشد.

$$\hat{y} = G \Delta u + f \quad (3)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_P & g_{P-1} & g_{P-2} & \dots & g_1 & 0 \end{bmatrix}$$

با وجود آنکه کاربرد کنترل کننده پیش بین (MPC) در صنعت رشد چشمگیری داشته است اما تحلیل پایداری آن مدت ها مسئله حل نشده ای بوده و نتایج بسیار کمی از شرایط لازم و کافی برای تضمین پایداری به دست آمده است. برای فرآیندهای خطی ناپایدار، چهار رویکرد کلی برای پایداری حلقه بسته مطرح شده است. رویکرد اول تأمین پایداری با افق پیش بینی نامحدود ولی افق کنترل محدود می باشد [۱]. غیر عملی بودن این دیدگاه در کنترل بعضی از سیستم ها موجب شد که پایداری حلقه بسته از طریق افق پیش بینی محدود انجام گیرد و پایداری فرآیند از تلفیق تابع هزینه همراه با محدودیت "حالت انتهایی صفر" به دست آید [۲] و [۳]. پیامدهای ناشی از محدودیت های سخت از جمله پیچیده شدن بهینه سازی در حالت وجود محدودیت های تساوی، افست در خروجی، اشباع در ورودی و امکان عدم وجود پاسخ باعث شد که در رویکرد سوم شرط محدودیت تساوی با اضافه نمودن عبارت جریمه برای حالت انتهایی در تابع هزینه جایگزین شود [۴-۷]. رویکرد چهارم بر این بینه استوار است که ابتدا فرآیند پایدار و سپس کنترل کننده MPC به فرآیند اعمال شود [۸]. ما به دنبال تأمین پایداری برای فرآیندهای مورد نظر که غیر حداقل فاز می باشند، با افق پیش بینی محدود هستیم. از این رو، روش اول و چهارم کارائی ندارند چرا که در روش اول افق پیش بینی نامحدود است و روش چهارم برای غیر حداقل فاز کارائی ندارد.

در بخش ۲ صورت کلی مسئله و در بخش ۳ شرایط تعیین شده توسط روش های دوم و سوم برای تأمین پایداری مطرح می گردد. در بخش ۴ با مثال های مختلف نشان می دهیم که رویکردهای دوم و سوم نمی توانند برای بعضی از فرآیندهای ناپایدار، سیستم حلقه بسته را پایدار نمایند که چگونگی و علت آن در بخش های ۵ و ۶ تعیین و راه حل رفع آن ارائه می شود. در بخش ۷ روش پیشنهادی را روی فرآیندهایی که با

بع‌دی تکرار می‌گردد.

۳- روش‌های پایدارسازی با افق پیش‌بینی محدود ۳-۱- CRHPC (Constraint Receding Horizon) (Predictive Control)

پایه الگوریتم کنترل پیش‌بین با هدف تأمین پایداری، حل مسئله کنترل بهینه همراه با محدودیت حالت انتهائی می‌باشد. بر این اساس پایدارسازی فرآیندهای خطی ناپایدار با اضافه شدن محدودیتی به این صورت که "خروجی مدل در انتهای افق خروجی برابر خروجی مطلوب باشد" به مسئله بهینه‌سازی، امکان‌پذیر است. نتیجه این روش حل مسئله بهینه‌سازی زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & J_{GPC} \\ \text{s.t.} \quad & y(t+P+j) = y_d(t+P) \\ \text{and} \quad & \Delta u(t+P+j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (V)$$

برای حل مسئله بهینه‌سازی بالا از تعریف لاگرانژین استفاده شده به این صورت که محدودیت تساوی بالا با ضریب لاگرانژ به J_{GPC} اضافه می‌شود و مسئله بهینه‌سازی بدون محدودیت حل می‌شود. با نوشتن قیدها به صورت برداری داریم:

$$\begin{aligned} \underline{G}\Delta u + \underline{f} &= \underline{y}_d \\ \underline{y}_d &= [y_d(t+P) y_d(t+P) \dots y_d(t+P)]^T \\ \underline{f} &= [f(t+P+1) f(t+P+2) \dots f(t+P+m)]^T \end{aligned}$$

بردار ورودی‌های آینده \mathbf{u} با حداقل کردن تابع هزینه (V) مبتنی بر سه هدف، شامل:

- ۱- حداقل نمودن اختلاف بین خروجی فرآیند و خروجی مطلوب
- ۲- حداقل نمودن تغییرات خروجی کنترل
- ۳- برآورده شدن محدودیت‌ها

از رابطه زیر به دست می‌آید [۳].

$$\begin{aligned} \Delta u &= [\Delta u(t) \quad \Delta u(t+1) \quad \dots \quad \Delta u(t+P-1)]^T \\ \hat{y} &= [y(t+1) \quad y(t+2) \quad \dots \quad y(t+P)]^T \\ f &= [f(t+1) \quad f(t+2) \quad \dots \quad f(t+P)]^T \end{aligned}$$

اگر مسیر مرجع دارای تغییرات و پرش‌های ناگهانی باشد مستقیماً در محاسبات دخالت داده نمی‌شود و از مسیر هموار شده مرجع استفاده می‌شود. حال اگر $r(t)$ سیگنال مرجع و β ثابت زمانی فیلتر ورودی باشد (که مقدار آن میزان هموارشدگی خروجی مطلوب نسبت به مسیر مرجع را مطابق رابطه (۴) تعیین می‌کند)، آنگاه تابع هزینه کنترل‌کننده GPC به صورت رابطه (۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$y_d(t) = \frac{1-\beta}{1-\beta q^{-1}} r(t), \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} J_{GPC} &= \sum_{j=1}^P (q_i (y_d(t+j) - y(t+j))^2 + r_i \\ &\Delta u(t+j-1)^2) \end{aligned} \quad (5)$$

بردار ورودی‌های آینده \mathbf{u} با حداقل کردن تابع هزینه (۵) مبتنی بر دو هدف، شامل حداقل نمودن اختلاف بین خروجی فرآیند و مسیر مطلوب و همچنین حداقل نمودن تغییرات خروجی کنترل، از رابطه (۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_d - \mathbf{f}) \\ \mathbf{R} &= \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_p), \quad \mathbf{Q} \\ &= \text{Diag}(q_1, q_2, \dots, q_p) \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه فوق ماتریس‌های وزنی \mathbf{R} و \mathbf{Q} به ترتیب مثبت معین و مثبت نیمه‌معین است. با استفاده از اولین مؤلفه از سیگنال کنترلی به دست آمده و رابطه زیر، مقدار $u(t)$ تعیین شده و به فرآیند اعمال می‌شود.

$$u(t) = \Delta u(t) + u(t-1)$$

بر اساس نتایج به دست آمده و آخرین اطلاعات اندازه‌گیری شده مراحل بالا در زمان‌های نمونه‌بندی

اما این روش برای تأمین پایداری نیاز به افق کنترل و افق پیش‌بینی (M و P) خیلی بزرگ دارد که این موضوع خود مشکل بزرگی می‌باشد. برای حل این موضوع روش GPCW مطرح می‌شود که تعمیمی بر GPC است و توسط وزن‌گذاری روی نقاط انتهایی افق زمانی انجام می‌گیرد. در GPC معمولاً حالت نهایی به حساب نمی‌آید ولی برای تضمین پایداری باید آن را به حساب آورد که این کار در فضای حالت به دو روش زیر امکان پذیر است:

- ۱- گذاشتن قید صفر روی حالت نهایی
 - ۲- گذاشتن ترم درجه دومی از حالت نهایی در تابع هزینه.
- استفاده از روش دوم دارای برتری‌های زیادی از جمله موارد زیر است.

- ۱- فرم زیبای فرموله کردن GPC حفظ می‌شود.
- ۲- این حالت کلی‌تر از GPC و CRHPC است و هر یک را می‌توان از آن به دست آورد.
- ۳- قیدهای به کار رفته در CRHPC برای تحقق پایداری ممکن است سبب عدم وجود پاسخ شود. برای اضافه کردن جمله‌ای از نقطه پایانی، معادلات حالت لازم است و چون GPC بر اساس مدل تابع تبدیل می‌باشد، لازم است متغیرهای حالت سیستم در نظر گرفته شود. اگر حالت جزئی $x(t)$ را مطابق رابطه زیر تعریف کنیم:

$$x(t) = \frac{1}{\Delta} \Delta u(t-1) \quad (9)$$

آنگاه برای سیستم تعریف شده با رابطه (۱) داریم:

$$x(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + f(t+j) \quad (10)$$

بردار حالت از روی حالت جزئی $x(t)$ و $(n-1)$ مقدار قبلی آن ساخته می‌شود، یعنی داریم:

$$x(t) = [x(t-n+1), x(t-n+2), \dots, x(t)]^T$$

$$n = \max(\deg(A), \deg(B)) + 1$$

$$\Delta u = \tilde{G} [I - \tilde{G}^T [G \tilde{G} G^T]^{-1} G \tilde{G}]$$

$$G^T Q [y_d - f] + \tilde{G} G^T$$

$$[G \tilde{G} G^T]^{-1} [\bar{y}_d - \bar{f}] \quad (8)$$

$$\tilde{G} = [G^T Q G + R]^{-1}$$

از آنجا که R مثبت معین است، \tilde{G} قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین، برای آنکه ماتریس $G \tilde{G} G^T$ معکوس‌پذیر باشد باید ماتریس G معکوس‌پذیر باشد. برای تحقق این موضوع لازم است که دو شرط زیر برقرار گردد.

1. $m \leq P+1$
2. $m \leq n+1$

m و n به ترتیب درجه فرآیند و تعداد قیده‌های لازم می‌باشد.

قضیه ۱- اگر رفتار فرآیند بر اساس رابطه (۱) داده شده باشد آنگاه برای پایداری لازم است که یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد (در اینجا $P=M$ در نظر گرفته شده است) [3].

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad q(t+i) \geq 0, \quad i=1, \dots, P \\ 2. \quad r(t+i) > 0, \quad i=0, 1, \dots, P \\ 3. \quad P \geq n+2 \\ 4. \quad m = n+1 \end{array} \right. \quad \text{حالت اول:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad q(t+i) = 0, \quad i=1, \dots, P \\ 2. \quad r(t+i) > 0, \quad i=0, \dots, P \\ 3. \quad P \geq n+2 \\ 4. \quad m = n+1 \end{array} \right. \quad \text{حالت دوم:}$$

GPC with end-point) GPCW -۲-۳ (state Weighting

روش GPC توانائی کنترل پایدار فرآیندهائی با پارامترهای متغیر با زمان، زمان مرده متغیر و با مدلی که درجه‌اش به طور مداوم تغییر می‌کند را فراهم می‌آورد.

برای تعیین بردار حالت در نقطه پایانی داریم:

$$\hat{x}(t+P) = \tilde{G}\Delta u + \tilde{f} \quad (11)$$

$$P_{i+1} = \bar{A}^T P_i \bar{A} - \bar{A}^T P_i \bar{B} (\bar{B}^T P_i \bar{B} + \lambda I)^{-1} \bar{B}^T P_i \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} \quad (14)$$

$$\tilde{f} = [f(t+P-n+1), \dots, f(t+P-1), f(t+P)]$$

۴- بررسی پایداری فرآیندهای ناپایدار

باروش‌های فوق
۴-۱- فرآیند ناپایدار با ریشه
غیر تکراری در سمت راست و
حد اقل‌فاز

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{p-n} & \dots & g_1 & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{p-n-1} & \dots & g_2 & g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ g_{p-1} & \dots & & & & \dots & g_0 \end{bmatrix}$$

تابع هزینه تعمیم یافته زیر را در نظر می‌گیریم:

$$J_{GPCW} = [\hat{x}(t+P) - \tilde{r}]^T \Psi [\hat{x}(t+P) - \tilde{r}] + J_{GPC} \quad (12)$$

در بررسی این نوع از فرآیندها از جمله فرآیند رابطه (۱۵) روش‌های پایدارسازی با محدودیت سخت (CRHPC) و پایدارسازی با محدودیت نرم (GPCW) به کار گرفته شد که در هر دو حالت با انتخاب مناسب P (افق پیش‌بینی) و M (افق کنترل)، (M = P = 10) و همچنین تعداد قید نهائی m = 3 پایداری حلقه‌بسته سیستم حاصل می‌شود. نتیجه شبیه‌سازی در شکل (۱) آورده شده است.

$$\tilde{r} = \frac{r(t+P)}{B(1)} [1, 1, \dots, 1]^T$$

Ψ ماتریس وزنی مربوط به بردار حالت در نقطه پایانی است.

$$G(s) = \frac{0.25s + 0.025}{s^2 + 0.45s - 0.025} \quad (15)$$

قضیه ۲- اگر معادلات حالت حاکم بر فرآیند مطابق رابطه زیر باشد آنگاه با برقراری یکی از حالت‌های زیر سیستم حلقه‌بسته پایدار خواهد بود [6].

۴-۲- فرآیند ناپایدار با ریشه
غیر تکراری در سمت راست و
غیر حد اقل‌فاز

$$x(t+1) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad (13)$$

$$y(t) = \bar{C}x(t)$$

فرآیند رابطه (۱۶) از این حالت برخوردار است:

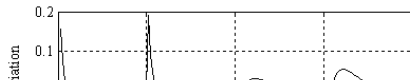
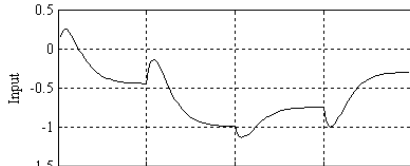
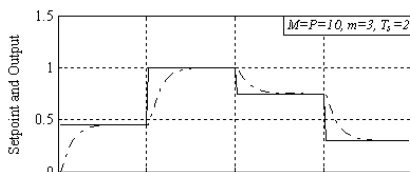
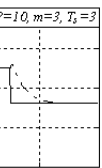
$$G(s) = \frac{-0.25s + 0.025}{s^2 + 0.45s - 0.025} \quad (16)$$

اگر (A, B) پایدارپذیر، (A, C) آشکارپذیر و $P_1 - P_0 \leq 0$ آنگاه کنترل‌کننده GPCW برای هر $P \geq 1$ فرآیند را پایدار می‌سازد.

با استفاده از کنترل‌کننده GPC معمولی و در حالت‌های مختلف تنظیمی، پایداری حلقه‌بسته حاصل نشد؛ ولی با استفاده از روش CRHPC و با در نظر گرفتن M = P = 10 و قیدهای حالت نهائی m = 3 پایداری سیستم حلقه‌بسته به دست آمد. نتیجه این شبیه‌سازی در شکل (۲) آورده شده است.

اگر (A, B) پایدارپذیر، $(\bar{A}, (\bar{C}\bar{C}^T + P_0 - P_1)^{1/2})$ آشکارپذیر، $\bar{C}\bar{C}^T + P_0 - P_1 \leq 0$ و $P_2 - P_1 \leq P_1 - P_0$ آنگاه قانون کنترل‌کننده GPCW فرآیند را پایدار می‌سازد.

اگر $\Psi = \alpha I$ و (A, B) پایدارپذیر و (A, C) آشکارپذیر و A غیر منفرد باشد آنگاه اگر $\alpha \rightarrow \infty$ سیستم حلقه‌بسته برای هر $P > n+1$ پایدار است.



شکل ۱ پاسخ کنترل کننده پیش بین برای مثال ۱-۴

شکل ۲ پاسخ کنترل کننده پیش بین برای مثال ۲-۴

جدول ۱ مقادیر Condition Number برای سیستم های مختلف

فرآیند	مثال ۱	مثال ۲	مثال ۳	مثال ۴
Condition Number	78.4060	5.6981	1.3246e+131	7.9883e+131

۳-۴- فرآیند ناپایدار با ریشه تکراری در سمت راست و حداقل فاز فرآیند رابطه (۱۷) دارای چهار ریشه $z \pm 5, +2, +2,$ در سمت راست صفحه s می باشد.

$$G(s) = \frac{10.4s + 104}{s^4 - 14s^3 + 70s^2 - 144s + 104} \quad (17)$$

برای کنترل این فرآیند، روش های مطرح شده در پایدارسازی از جمله CRHPC، GPCW، MWGPC (Mixed Weighting GPC) [9] مورد بررسی قرار گرفت که با در نظر گرفتن شرایط مطرح شده برای پایداری با این روش ها، پایداری حلقه بسته حاصل نشد.

۴-۴- فرآیند ناپایدار با ریشه تکراری در سمت راست و غیرحداقل فاز فرآیند رابطه (۱۸) مشابه فرآیند رابطه (۱۷) دارای ریشه تکراری حقیقی و همچنین ریشه مختلط ساده در سمت راست و علاوه بر این غیرحداقل فاز است.

$$G(s) = \frac{104(s-1)}{s^4 - 14s^3 + 70s^2 - 144s + 104} \quad (18)$$

روش های مطرح شده در پایدارسازی مورد بررسی قرار گرفت ولی با در نظر گرفتن شرایط تعیین شده در هر روش پایداری حلقه بسته حاصل نگردید. در اینجا پایدارسازی فرآیندهای ناپایدار حداقل فاز و غیرحداقل فاز مورد بررسی قرار گرفت. مطابق جدول (۱) ملاحظه می شود که برای آن دسته از فرآیندهای ناپایدار که پایداری حاصل نمی شود،

پاسخی با دقت کم برای مسئله Well-Conditioned به دست آورد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که نوع مسئله (Well-Conditioned یا ill-Conditioned) در محاسبات عددی بیش از دو موضوع دیگر در تعیین میزان قابلیت اعتماد محاسبات نقش دارد. برای تعیین میزان شایستگی یک مسئله پارامتر Condition Number مطرح می شود که مشخص می کند جواب مسئله می تواند با چه دقتی تعیین شود. در تعیین جواب معادله $Ax = b$ ، برای آن که بدانیم جواب با چه دقتی محاسبه می شود یک راه محاسبه Condition Number ماتریس A می باشد. اگر ابعاد ماتریس A برابر $P \times M$ باشد و همچنین مرتبه آن برابر r باشد، آنگاه می توان نوشت:

$$A = U \Sigma V^T \quad (19)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

که در آن U و V^T ماتریس های متعامد با ابعاد به ترتیب $P \times P$ و $M \times M$ می باشند. S یک ماتریس متعامد با ابعاد $r \times r$ است. $\sigma_i, i=0, 1, \dots, r-1$ ها مقادیر ویژه ماتریس A می باشند. اگر Condition Number ماتریس A را با $\text{cond}(A)$ نشان دهیم، داریم:

$$\text{cond}(A) = \max(\sigma_i) / \min(\sigma_i) \quad (20)$$

از این پارامتر در تخمین میزان دقت نتایج به دست آمده از حل معادلات خطی استفاده می شود [10]. بهترین مقدار برای $\text{cond}(A)$ یک می باشد. اگر در تعیین جواب معادله فوق $\text{cond}(A) > 1/\sqrt{\text{eps}}$ (در استاندارد IEEE مقدار eps برابر است با 2.2×10^{-16} و در نتیجه $1/\sqrt{\text{eps}} = 6.7 \times 10^8$) باشد، آنگاه لازم است مسئله به صورت مناسبی نرمالایز شود تا Condition Number بهبود یابد.

محاسبه معکوس ماتریس $G^T QG + R$ از حداقل دقت، برخوردار نیست. در این حالت مسئله بهینه سازی به یک مسئله ill-condition تبدیل می شود و در نتیجه قابلیت اعتماد در محاسبات به حدی کاهش می یابد که محاسبات مربوط به معکوس ماتریس ها حداقل دقت لازم را ندارد.

ملاحظه می شود که شرایط تعیین شده توسط هر یک از این روش ها برای تأمین پایداری کافی نیست و لازم است شرایط دیگری برای تحقق پایداری اضافه شود. در ادامه چگونگی تأمین شرایط لازم آورده شده است.

۵- قابلیت اعتماد محاسبات

برای به دست آوردن پاسخ دقیق عددی با کامپیوتر، نیاز داریم که:

- ۱- مسئله مورد نظر Well-Conditioned باشد.
 - ۲- از یک الگوریتم با پایداری عددی در محاسبات با دقت محدود، استفاده شود.
 - ۳- در اجرای الگوریتم از نرم افزار خوبی استفاده شود.
- یک مسئله را Well-Conditioned گویند اگر تغییرات کم در داده ها سبب تغییرات نسبتاً مشابه (کم) در جواب شود. اگر تغییرات کمی در داده ها این قدرت را داشته باشد که تغییرات بزرگی را در جواب القا کند آنگاه مسئله را ill-Conditioned نامند. یک الگوریتم پایدار عددی است اگر حساسیتی بیش از خود پروسه نسبت به اغتشاش ایجاد نکند. می توان نشان داد که بسیاری از الگوریتم های جبری خطی عددی پایدار هستند؛ یعنی نشان داده می شود که جواب حاصل از آنها نزدیک به پاسخ واقعی هستند.

پاسخ یک مسئله با یک الگوریتم پایدار که دارای اغتشاش کمی باشد، نزدیک به جواب حقیقی خواهد بود اگر مسئله Well-Conditioned باشد. نمی توان انتظار داشت که یک الگوریتم پایدار بتواند یک مسئله ill-Conditioned را با دقتی بیش از ارزش خود داده ها حل کند در حالی که یک الگوریتم ناپایدار می تواند

$$\text{cond}(\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda) \quad (23)$$

$$\max(\sigma_i) = \sigma_0, \quad \min(\sigma_i) = \sigma_{r-1}$$

داریم:

$$k = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda) \quad (24)$$

و در نتیجه مقدار λ برابر است با:

$$\lambda = (\sigma_0 - k\sigma_{r-1}) / (k - 1) \quad (25)$$

با انتخاب مقدار λ از رابطه (25) و محاسبه ورودی‌های آینده توسط رابطه (6) این اطمینان وجود دارد که Condition Number مربوط به محاسبه معکوس ماتریس برابر مقدار تعیین شده k خواهد بود.

۶- جلوگیری از انتشار خطا

در تابع هزینه (5) ماتریس وزنی Q را با پارامترهای متغیر با زمان و به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha^{P-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{P-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{P-3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

حال اگر پارامتر $\alpha > 1$ باشد، وزن جملات اولیه تابع هزینه (5) بیشتر از جملات نهایی خواهد بود. این افزایش باعث می‌شود خطای لحظات اولیه سیستم در بهینه‌سازی بیشتر مورد توجه قرار گیرد. به طور مفهومی می‌توان چنین استدلال نمود که این عمل باعث می‌شود که در یک سیستم ناپایدار توجه به جملات اولیه خطا بیشتر باشد تا از خطای افزایشی سیستم (چون سیستم اصلی ناپایدار است و در نتیجه خروجی آن با زمان افزایش می‌یابد) جلوگیری شود. از آنجا که در کنترل

در اینجا می‌خواهیم قابلیت اعتماد محاسبات عددی در تعیین کنترل کننده پیش‌بین را برای فرآیندهای ناپایدار غیر حداقل فاز مورد بررسی قرار دهیم. مطابق رابطه (6) برای محاسبه ورودی‌های آینده، معکوس ماتریس $\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}$ مورد نیاز است. اگر $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ و $\mathbf{R} = 0$ باشد برای ورودی‌های آینده، معکوس $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ لازم است. برای پروسه‌های حلقه‌باز ناپایدار چون ضرایب پاسخ پله همانند پروسه‌های حلقه‌باز پایدار محدود نیستند ماتریس \mathbf{G} که از ضرایب پاسخ پله تشکیل شده است، دارای مقادیری با دامنه وسیع خواهد بود که این موضوع سبب افزایش اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ و در نتیجه افزایش Condition Number می‌شود. ماتریس \mathbf{R} را به صورت $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{I}$ در نظر می‌گیریم و پارامتر λ را چنان تعیین می‌کنیم که $\text{cond}(\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})$ کاهش یابد. اگر:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (21)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه داریم:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I} = \mathbf{U} \Sigma^* \mathbf{V}^T \quad (22)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} \lambda + \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda + \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda + \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

حال اگر بخواهیم Condition Number ماتریس $\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}$ برابر مقدار معین k باشد، با توجه به روابط زیر:

$$H(q^{-1}) = \begin{bmatrix} H_1(q^{-1}) \\ H_2(q^{-1}) \\ \vdots \\ H_P(q^{-1}) \end{bmatrix}, F(q^{-1}) = \begin{bmatrix} F_1(q^{-1}) \\ F_2(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_P(q^{-1}) \end{bmatrix}, P(q^{-1}) =$$

$$\begin{bmatrix} q^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q^P \end{bmatrix}$$

رابطه (۲۸) همان مدل RST با شرایط زیر می‌باشد.

$$R(q^{-1}) = (1 + q^{-1}kH(q^{-1}))\Delta,$$

$$S(q^{-1}) = kq^{-1}F(q^{-1}),$$

$$T(q^{-1}) = kP(q^{-1})$$

اگر چند جمله‌ای ناشی از قطب‌های حلقه‌بسته را با Ω نشان دهیم، آنگاه از روابط (۱) و (۲۸) رابطه زیر برای این قطب‌ها به دست می‌آید.

$$\Omega = RA + SB = \tilde{A} +$$

$$k[q^{-1}H(q^{-1})\tilde{A} + q^{-1}F(q^{-1})B] \quad \tilde{A} = \Delta A \quad (29)$$

مراحل تنظیم دو پارامتر α و λ به این صورت می‌باشد که ابتدا با انتخاب α با شرط $\alpha > 1$ در حالی که بخواهیم Condition Number برابر مقدار k باشد، از رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) مقدار λ مشخص می‌شود. با معلوم بودن این دو پارامتر می‌توان از رابطه (۲۹) تعیین نمود که بزرگترین قطب حلقه‌بسته در خارج و یا داخل دایره واحد قرار دارد. با تکرار این الگوریتم برای گستره وسیعی از مقادیر α می‌توان مقادیر مناسبی از این دو پارامتر را برای تحقق پایداری به دست آورد. افزون بر این می‌توان دیگر پارامترها از جمله M ، P و زمان نمونه‌برداری را در این الگوریتم برای بهتر نمودن

پیش‌بین تنها مؤلفه اول از سیگنال ورودی محاسبه شده به سیستم اعمال می‌شود و در مرحله بعد این الگوریتم تکرار می‌گردد، بنابراین از رشد خطا جلوگیری می‌شود. برای بعضی از فرآیندهای ناپایدار با ریشه‌های تکراری سمت راست علی‌رغم مناسب بودن Condition Number پایداری حاصل نمی‌شود که علت آن افزایش خطای سیستم با سرعت زیاد می‌باشد. با انتخاب ضرایب وزنی تابع هزینه به صورت فوق، پایداری سازی فراهم می‌گردد.

۷- بررسی پایداری فرآیندهای ناپایدار با روش

پیشنهادی

چگونگی تعیین پارامترهای α و λ برای تأمین پایداری حلقه بسته به این صورت می‌باشد که ابتدا رابطه آنها با محل قطب‌های حلقه‌بسته را به دست می‌آوریم و سپس دو پارامتر فوق را چنان تعیین می‌کنیم که اولاً Condition Number برابر مقدار تعیین شده باشد و ثانیاً پایداری محقق شود. برای این منظور، از رابطه (۶) داریم:

$$\Delta u(t) = k(y_d - f) \quad (27)$$

که در آن k اولین سطر ماتریس $(G^T QG + R)^{-1} G^T Q$ است. با قرار دادن مقدار f از رابطه (۲) در (۲۷) داریم:

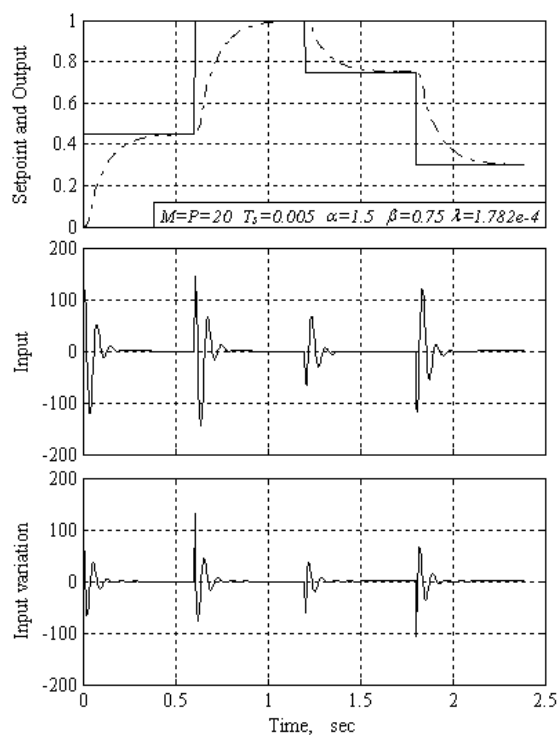
$$(1 + q^{-1}kH(q^{-1}))\Delta u(t) = kP(q)y_d - kq^{-1}F(q^{-1})y(t) \quad (28)$$

(۳) و (۴) آمده است. این نتایج با حداقل افق پیش‌بینی ($P=M$) به دست آورده شده است و اگر افق پیش‌بینی بیش از افق کنترل در نظر گرفته شود ($P>M$)، آنگاه شرایط سیستم از نظر پایداری بهتر می‌شود.

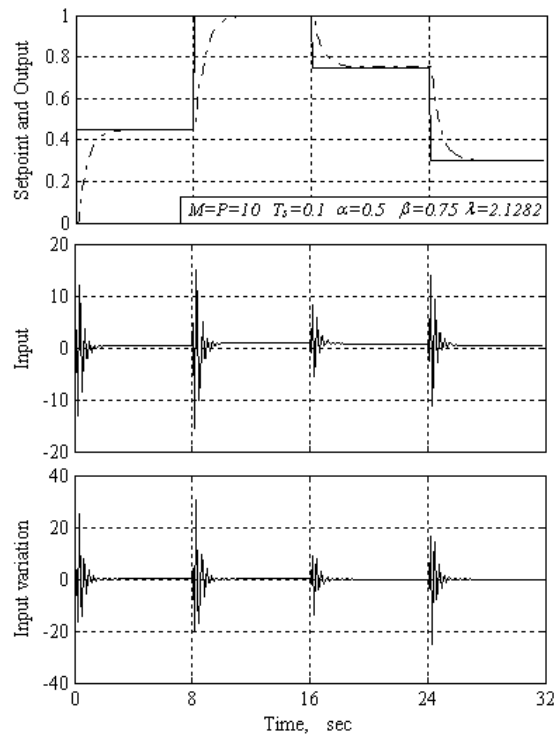
وضعیت پایداری دخالت داد. در بررسی پایداری مثال‌های ۳ و ۴ با روش پیشنهادی با تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده مطابق جدول (۲) پایداری حاصل می‌شود که نتایج آن در شکل‌های

جدول ۲ مشخصات سیستم حلقه بسته قبل و بعد از اعمال روش مطرح شده

	P = M	α	λ	Condition Number	وضعیت
مثال ۳	10	1	1	1.3246e131	ناپایدار
مثال ۳	10	5	2.1282	100000	پایدار
مثال ۴	20	1	1	7.9885e131	ناپایدار
مثال ۴	20	1.5	1.782e-4	100	پایدار



شکل ۴ پاسخ سیستم حلقه بسته برای مثال ۴-۴



شکل ۳ پاسخ سیستم حلقه بسته برای مثال ۳-۴

۸- نتیجه گیری

تعیین و سپس از کنترل‌کننده به صورت on line استفاده نمود.

۳- در بررسی فرآیندهای مختلف ملاحظه شد که با انتخاب بهینه پارامترهای یاد شده می‌توان سیستم را با افق کنترل و افق پیش‌بینی کمتر کنترل نمود که این موضوع سبب کاهش محاسبات و در نتیجه افزایش سرعت می‌شود.

۴- در توسعه این روش می‌توان در تابع هزینه افزون بر خطا، تغییرات خطا را نیز در نظر گرفت.

در این مطالعه پایداری با مقاوم‌سازی محاسبات عددی و همچنین جلوگیری از رشد خطا محقق شد. از مزایای عمده این روش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱- از آنجا که به صورت مستقیم محدودیتی به مسئله بهینه‌سازی اضافه نشده است، مسائل مربوط به وجود محدودیت از جمله افسست و مشکل عدم وجود پاسخ پیش نمی‌آید.

۲- می‌توان به صورت off line پارامترهای λ و α را

۹- مراجع

1. J.A. Rossiter, J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, "Infinite Horizon Predictive Control", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No.10, October (1996).
2. J.A. Rossiter, J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, "Constrained Cautious Stable Predictive Control", IEE Proceedings-D, Vol. 144, No. 4, July (1997).
3. J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, "Constrained Multivariable Cautious Stable Predictive Control", IEE Proceedings-D, Vol. 145, No. 5, September (1998).
4. Y.I. Lee, W.H. Kwon, Y.H. Kim, "Weighted Receding Horizon Predictive Control and its Related GPC with Guaranteed Stability", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, Texas, December, (1993).
5. H.W. Gomma, D.H. Owens, "Time Varying Weighting Generalized Predictive Control (TGPC) with Prediction to Performance, Stability and Robustness", Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA, December (1999).
6. S. Weiland, A.A. Stoovogel, A.A. Tiagounov, "End-Point Parameterization and Guaranteed Stability for a Model Predictive Control Scheme", Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December (2001).
7. D.Q. Mayne, "Improved Stabilizing Condition for Model Predictive Control", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December (2000).
8. B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, J.R. Gossner, "Improved Algorithm for Multivariable Stable Generalized Predictive Control", IEE Proceedings-D, Vol. 144, No 4, July (1997).
9. Li-F. Zhou, "The Mixed-Weights Least-Square Stable Predictive Control for Constrained Multi-Object Multivariable System", Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetic, Xian, China, November (2003).
10. V.C. Klema and A.J. Laub, "The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 2, April, (1980).