کاربردتئوري اندازه در کنترل پذيري تابعي سيستم‌هاي غير خطي و تعميم آن

آصف زارع [۱]* علي خاکي صديق[۲] علي وحيديان کامياد[۳]

(۱) استاديار، گروه برق، دانشگاه آزاد اسلامي واحد گناباد
(۲) استاد، گروه کنترل، دانشگاه صنعتي خواجه نصيرالدين طوسي
(۳) استاد، گروه رياضي، دانشگاه فردوسي مشهد

تاریخ ثبت اولیه: ۱۳۸۴/۶/۲، تاریخ دریافت نسخه اصلاح شده: ۱۳۸۵/۵/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۵/۶/۱۶

چکيده در اين مقاله نخست به کمك تئوري اندازه روش جديدي براي کنترل پذيري تابعي سيستم هاي غيرخطي و تعميم آن و سپس روش جديدي براي حل مسائل مختلف کنترل بهينه حداقل زمان براي کنترل سيستم هاي غيرخطي ارائه مي‌شود. در ابتدا مسائل ياد شده به مسائل کنترل بهينه غيرخطي با افق زماني محدود تبديل مي‌گردد و آن گاه با انتقال مسائل به دست آمده به فضاي اندازه نشان داده مي شود که بايد يك اندازه بهينه که متناظر حل يك مسأله برنامه ريزي خطي با بعد بي‌نهايت است، تعيين گردد. سپس با تقريب مسأله برنامه‌ريزي خطي با بعد بي نهايت با يك مسأله برنامه‌ريزي خطي با بعد متناهي، تابع کنترل بهينه به صورت تابع قطعه‌اي ثابت، به دست آورده مي شود.

واژه هاي کليدي **تئوری اندازه، کنترل بهینه غیرخطی، کنترل پذیری، کنترل حداقل زمان، برنامه ریزی خطی.**

*عهده دار مکاتبات
نشانی: دانشگاه آزاد اسلامي واحد گناباد، گروه برق
تلفن: ۷۲۵۵۰۰-۰۵۳۵ **پست الکترونیکی:** A-zare@Iau-gonabad.ac.ir

۱- مقدمه

تئوري اندازه ابزاري كارامد و جديد است كه به كمك آن طيف وسيعي از مسائل كنترل بهينه (خطي و غيرخطي) را مي‌توان به صورت تقريبي حل كرد. از جمله كاربردهاي تئوري ياد شده مي توان به كنترل بهينه معادله انتقال حرارت [9]،[16]،[2]، كنترل بهينه معادله موج [7]، حل معادله ديفرانسيل غيرخطي [6]، [1]، كنترل بهينه سيستم هاي‌غيرخطي [21]، [4]، [۱۹]، حل مسأله كنترل بهينه غيرخطي با افق بي‌نهايت [4]، [۱۷]، حل مسأله كنترل بهينه غيرخطي گسسته با افق محدود[۲۰] و بي‌نهايت [۱۹] ، بررسي كنترل پذيري حالت سيستم هاي غيرخطي زمان پيوسته و زمان گسسته[۱۸] و كنترل بهينه معادلات بيضوي [13] اشاره نمود. در بحث كلاسيك كنترل بهينه، به طور معمول از برنامه‌ريزي پويا [16]، [15] و يا اصل حداقل‌يابي پونترياگن [10] استفاده مي شود. روش اول با مشكل ابعاد مواجه است و بايد تابع هدف محدب باشد [15]، [16]. روش دوم نيز در مسائل غيرخطي مشكلات زيادي دارد. آن چه در اين مقاله بررسي مي‌شود، كاربرد تئوري اندازه در كنترل پذيري تابعي و مسائل‌تعميم يافته آن درسيستم هاي غيرخطي است. نخست اين مسائل را به مسائل كنترل بهينه تبديل مي كنيم كه مسأله حاصل يك مسأله كنترل بهينه غيرخطي با تابع هدف غيرمحدب است. از آنجا كه مسأله كلاسيك به دست آمده را نمي‌توان با روش‌هاي مرسوم حل كرد، آن را به صورت يك به يك به مسأله‌اي در فضاي اندازه هاي رادن متناظر مي‌كنيم. سپس مسأله جديد را كه يك مسأله برنامه‌ريزي خطي با بعد نامتناهي است، به صورت تقريبي به يك مسأله برنامه‌ريزي خطي با بعد متناهي تبديل مي‌كنيم و با كمك نرم افزار مسأله اخير را حل مي‌نماييم. با استفاده از جواب هاي مسأله، كنترل هاي تقريبي را به صورت توابع قطعه‌اي ثابت به دست آورده و به اين ترتيب، به كمك معادلات حالت مسيرهاي بهينه تقريبي كه در حقيقت تقريبي براي مسأله با افق نامتناهي اوليه است، به دست مي‌آيند.

يك مزيت اساسي اين روش آن است كه به طور معمول، مسأله در فضاي اندازه داراي جواب تقريبي هست؛ اين جواب را به فضاي اوليه بر مي‌گردانيم كه در حقيقت پيدا

کردن جوابي براي مسأله در فضايي و سيع (فضاي اندازه) انجام گرفته است.

مسأله كنترل پذيري حالت در سيستم هاي غيرخطي در حالت زمان پيوسته قبلا" حل شده و كارايي روش تئوري اندازه در بعضي حالات مشخص گرديده است [۲۱]، [۱۷]. در واقع اين روش به جاي محاسبه زوج مسير- كنترل به دنبال عناصر ديگري بوده (در واقع به دنبال تعيين يك تابع است) و سپس مسائل كنترل بهينه را در فضاي اندازه به صورت تقريبي، به گونه‌ای كه يك تناظر يك به يك بين فضاي اندازه و فضاي اوليه (فضاي كنترل كلاسيك) باشد، حل مى‌كند [12]. اهميت اين روش در تبديل مسأله كنترل بهينه به‌صورت تقريبي به يك مسأله برنامه ريزي خطي و عدم وابستگي آن به محدب بودن تابع معيار مي باشد.

۲- مسأله كنترل پذيري تابعي و انتقال آن به فضاي اندازه

مسأله كنترل پذيري تابعي در سيستم هاي غيرخطي در حالت كلي به صورت زير است [۲۲]، [15]:

$$x^{\cdot}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad , \quad X(t_0) = x_0 \qquad (۱)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad , \quad y(t_f) = y_f$$

هدف، انتقال بردار خروجي $y(t)$ به $y(t_f) = y_f$ مي‌باشد، ضمن اين كه مقدار اوليه تابع حالت $x(t_0) = x_0$ باشد.

مسأله فوق را به صورت زير مي توان به يك مسأله كنترل بهينه تبديل كرد:

ابتدا مقدار بهينه تابع حالت جهت انتقال بردار خروجي به مقدار مطلوب $y(t_f) = y_f$ را تعيين مي‌كنيم.

در واقع بايد يك جواب دلخواه از دستگاه غيرخطي زير را به دست آورد:

(۲)

$$h(x(t_f), u(t_f)) = y_f$$

با توجه به تعريف مسأله قضيه زير را داريم:

قضيه (۱). شرط لازم و كافي براي اين كه مسأله كنترل پذيري تابعي داراي جواب باشد آن است كه:

الف) دستگاه غيرخطي (۲) داراي جواب $x(t_f) = x_f$ و $u(t_f) = u_f$ باشد.

ب) سيستم خطي شده روي مسير حالت كنترل پذير حالت باشد.

با فرض $x(t_f) = x_f$ و $u(t_f) = u_f$ كه از حل دستگاه غير خطي (۲) به دست مي‌آيند، مسأله كنترل پذيري فوق را به صورت زير مي

توان به يك مسأله كنترل بهينه تبديل كرد:

$$\underset{u(t)}{\text{Min}}\int_{t_0}^{t_f}(\|y(t)-y_f\|^2+\|x(t)-x_f\|^2+\|u(t)-u_f\|^2)dt$$

s.t

$$x^{\cdot}(t)=g(x(t),u(t),t)\ ,\ x(t_0)=x_0\ ,\ x(t_f)=x_f$$

اکنون برای انتقال مسئله فوق به فضاي اندازه، تبديلی به صورت زير در نظر میگيريم:

(۳)

$$\Lambda(F)=\int_{t_a}^{t_b}F(x(t),u(t),t)dt$$

در اينجا F تابعي پيوسته ($F\in C(A,U,J)$) و A مجموعه اي فشرده است كه بايد تقريباً همه جا تابع حالت در آن قرار گيرد ($\forall t: x(t)\in A$)، U مجموعه اي فشرده و اندازه پذير لبگ [3]، [14] است كه بايد تابع كنترل در آن قرار گيرد ($\forall t: u(t)\in U$) و J مجموعه‌اي به صورت $J=[t_a,t_b]$ است. تبديل فوق خطي، پيوسته، كراندار و مثبت میباشد، بنابراين میتوان آن را به صورت تابعي در نظر گرفت كه معادل يك اندازه روي فضاي اندازه هاي رادن است [12]، [14]. به اين ترتيب با استفاده از خواص تبديل (۳) كه ذيلا" آورده مي شوند، مي توان مسأله را از فضاي كنترل كلاسيك به فضاي اندازه انتقال داد و سپس با روشي كه ارائه ميشود، آن را حل نمود.

تبديل خطي فوق خواص زير را نيز دارا میباشد:

۱) اگر $\phi_j(x,t)\in C'(B)$ باشد (فضاي توابعي كه خود و مشتق اولشان روي B پيوسته يكنواخت باشند كه در آن B يك گوي باز شامل $A\times J$ است) و $\phi^g(x,u,t)$ را به صورت زير تعريف كنيم:

(٤)

$$\phi^g(x,u,t)=\phi_x(x,t).g(x,u,t)+\phi_t(x,t)$$

در واقع $\phi^g(x,u,t)=\frac{d}{dt}\phi(x,t)$ است، پس با توجه به تعريف فوق داريم:

$$\int_{t_a}^{t_b}\phi^g(x,u,t)dt=\phi\ (x(t_b),t_b)-\phi(x(t_a),t_a)=\Delta\phi$$

(٥)

۲) اگر $\psi(t)$ تابعي از $D(J^0)$ باشد كه در آن $D(J^0)$ فضاي توابع بي نهايت بار مشتق پذير با تكيه گاه فشرده روي $J^0=(t_a,t_b)$ است، و $\psi_j(x,u,t)$ را به صورت زير تعريف كنيم:

(٦)

$$\psi_j(x,u,t)=x_j\psi'(t)+g_j(x,u,t)\psi(t)$$

كه در آن x_j زامين مؤلفه x و g_j زامين مؤلفه g

می‌باشند. آنگاه برای تابع $\psi_j(x,u,t)$ داریم: [12]

$$\int_{t_a}^{t_b}\psi_j(x,u,t)dt=0 \qquad (۷)$$

۳) توابع $\theta_s(t)$ که پیوسته بوده و فقط شامل زمان هستند، (این زیر فضای $C(\Omega)$ را با $C_1(\Omega)$ نمایش می‌دهیم) را درنظر می‌گیریم، آنگاه داریم:

$$\int_{t_a}^{t_b}\theta_s(t)dt=a_{\theta_s} \qquad (۸)$$

بنابراین با توجه به تعریف $\Lambda(F)$ و با توجه به روابط (۵)، (۷) و (۸)، تبدیل $\Lambda(F)$ دارای خواص زیر است:

$$\Lambda(\phi^g)=\int_{ta}^{t_b}\phi^g(x,u,t)dt=\Delta\phi \qquad (۹)$$

$$\Lambda(\psi_j)=\int_{t_a}^{t_b}\psi_j(x,u,t)dt=0 \qquad (۱۰)$$

$$\Lambda(\theta_s(t))=\int_{t_a}^{t_b}\theta_s(t)dt=a_{\theta_s} \qquad (۱۱)$$

چنانچه توابع حالت و کنترل در مجموعه های فشرده A و U باشند و زمان در مجموعه فشرده J باشد، به طوری که مجموعه $\Omega=A\times U\times J$ فشرده باشد و فضای همه اندازه های رادن مثبت روی Ω را با $M^+(\Omega)$ نمایش دهیم، با به کارگیری این مفهوم و با استفاده از قضیه نمایشی ریس [3]، [14]، [12] می‌توان به مسئله کنترل بهینه تئوری اندازه شکل قطعی زیر را داد: تابع های خطی مثبت بالا، که با معادلات (۹) و (۱۱) داده شده‌اند را با اندازه های نمایشگر شان جایگزین می‌کنیم، بنابراین می‌توان مسئله کنترل بهینه با تئوری اندازه را به صورت زیر مطرح کرد:

به دنبال اندازه مثبتی در $M^+(\Omega)$ هستیم (اثبات وجود و پیوستگی [12]) و آن را با μ^* نمایش می‌دهیم که تابع:

$$\mu\in M^+(\Omega)\to\mu(f) \qquad (۱۲)$$

را می‌نیمم کرده و در محدودیت های زیر صدق نماید:

$$\mu(\phi^g)=\Delta\phi,\qquad \phi\in C'(B)$$

$$\mu(\psi_j)=0,\quad j=1,2,3,\ldots,n,\qquad \psi\in D(J^0) \qquad (۱۳)$$

$$\mu(\theta_s)=a_s,\qquad \theta_s\in C_1(\Omega)$$

زیر فضایی از $M^+(\Omega)$ که در معادلات (۱۳) صدق می‌کند را با Q نمایش (اثبات فشردگی در [12]) نمایش می‌دهیم. فرض کنید که اندازه بهینه μ^* چنان موجود است که تابع معیار (۱۲) را روی Q می‌نیمم سازد[12]. این اندازه را به صورت زیر می‌توان تقریب زد:

با افراز مجموعه $A\times U$ به قسمت‌های کوچک

s) قسمت) و همچنین تقسیم J به d (افراز Ω به $N = s.d$) قسمت با این شرط که تابع F در شرط لیپ ـ شیتس [3]، [11]، [14] صدق کند و افراز Ω به قدر کافی ظریف باشد، آنگاه با توجه به قضیه نمایشی ریس ـ فیشر، اندازه $\mu(F) = \Lambda(F)$ را می‌توان با تقریب مناسبی به صورت زیر بیان کرد[12]:

$$\mu(F) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j F(z_j) \tag{۱۴}$$

که در آن $z_j = (x_j, u_j, t_j)$ نماینده افرازام می‌باشد، و $\alpha_j \geq 0$ بستگي به تابعF دارد.

چنانچه شرایط فوق براي مسأله کنترل بهینه برقرار باشد، مي‌توان آن را به فضاي اندازه انتقال داد. به این ترتیب‌حل مسأله کنترل بهینه با تقریب بسیار خوبي به حل یك مسأله برنامه ریزي خطي و با متغیر هاي محدود به صورت زیر تبدیل مي‌شود :

$$\text{Min} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(z_j)$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_i^g(z_j) - \Delta\phi_i = 0 \quad , \ i = 1,2,3,\ldots, M_1$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_h(z_j) = 0 \quad , \quad h = 1,2,3,\ldots, M_2$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \theta_s(z_j) = a_s \quad , \quad s = 1,2,3,\ldots, L \tag{۱۵}$$

با حل مسأله برنامه ریزي فوق و تعیین α_n ها مي توان تابع قطعه اي ثابت کنترل را به دست آورد. برای افزایش دقت، مي توان تعداد توابع منتخب در قیدهاي مسأله (۱۵) را افزایش داد و از طرف دیگر افرازهاي A, U و J را ظریفتر انتخاب کرد.

۳- کنترل پذیري با وجود قیدهاي سخت و نرم

فرض کنید در صفحه فاز موانع مختلفي وجود داشته باشد که نقض آن‌ها در هر شرایطي امکان پذیر نباشد (قید سخت) و یا به اندازه‌اي که قیدها نقض مي شوند، تابع هدف جریمه شود (قید نرم) و یا این که بخواهیم خروجي سیستم ضمن انتقال به مقدار مطلوب در یك دالان قرار گیرد. براي این سه حالت نیز مي‌خواهیم کنترل پذیري تابعي را بررسي نموده و در صورت وجود جواب آن را به دست آوریم. در این جا فرض شده که مرز قیدها به شکل دایره یا بیضي (در فضا به صورت کروي یا بیضي‌گون) باشند. توجه داریم که یك قید با مرز

دلخواه را می‌توان با اجتماعی از دوایر (بیضی ها) به خوبی تقریب زد.

با استفاده از قضایای زیر شرایط لازم و کافی برای تبدیل قیدهای سخت و قیدهای نرم به صورت انتگرالی که فرم مطلوب درفضای اندازه است، به دست می آید.

قضیه (۲). شرط لازم و کافی برای آنکه خروجی سیستم $y(t)$ بین $y_2(t)$ و $y_1(t)$ قرار گیرد آن است که:

$$\forall t\in J \quad : \quad y_1(t)\le y(t)\le y_2(t)\Rightarrow$$

$$\int_J [1-\text{sign}(y(t)-y_1(t))]dt=0$$
$$\int_J [1-\text{sign}(y_2(t)-y(t))]dt=0$$

اثبات: شرط لازم به سادگی به دست می آید. چرا که روی فاصله J تابع علامت همواره یک است.

شرط کافی: اگر تعریف کنیم:

$$M=\{t: y(t)-y_1(t)<0\}\Rightarrow$$

$$\int_J [1-\text{sign}(y(t)-y_1(t))]dt=2.m(M)=0$$

که در آن $m(M)$ اندازه مجموعه M می‌باشد. با توجه به قضیه داریم: $m(M)=0$ یعنی حداکثر فقط در یک مجموعه شمارا شرط $y(t)-y_1(t)\ge 0$ نقض می‌شود. از طرف دیگر چون $y(t)$ پیوسته است لذا $M:$ تهی‌می‌شود. به همین ترتیب برای کران دیگر نیز می‌توان شرط را اثبات کرد.

قضیه (۳). شرط لازم و کافی برای آنکه بردار حالت قید سخت دایره‌ای با مرکز a_i و b_i و شعاع r_i را نقض نکند به صورت زیر است:

$$t\in J: \|x(t)-(a_i,b_i)\|\ge r_i \Rightarrow$$

$$\int_J [1-\text{sign}(\|x(t)-(a_i,b_i)\|-r_i)]dt=0$$

که در آن $x(t)=[x_1,x_2]$ بردار حالت سیستم می‌باشد.

اثبات: مشابه قضیه (۲).

قضیه (٤). شرط لازم و کافی برای آنکه بردار حالت قید سخت بیضوی با مرکز a_i و b_i و اقطار $2A_i$ و $2B_i$ را در فاصله زمانیJ نقض نکند، به صورت زیر است:

$$t\in J\int_J [1-\text{sign}\left(\frac{(x_1(t)-a_i)^2}{A_i^2}+\frac{(x_2(t)-b_i)^2}{B_i^2}-1\right)]dt=0$$

که در $x(t)=[x_1,x_2]$ بردار حالت سیستم می‌باشد.

اثبات: مشابه قضیه (۲).

حال شرایط لازم براي آنکه بردار حالت، قید نرم دایره‌اي با مرکز a_i و b_i و شعاع r_i را حتي‌الامکان نقض نکند، بررسي مي کنیم. با تعریف v_i که فاصله وزن دار بردار حالت تا مرکز دایره است و در آن w_i (وزن) عددي مثبت است:

$$v_i(t) = w_i(\|x(t)-(a_i,b_i)\| - r_i)$$

اگر تابع $s(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$s(t)=\frac{e^{v_i(t)}}{e^{v_i(t)}+e^{-v_i(t)}}$$

آنگاه شرط عدم نقض قید نرم را مي‌توان به صورت زیر بیان نمود.

براي آنکه بردار حالت قید نرم دایره‌اي با مرکز a_i و b_i و شعاع r_i را حتي الامکان نقض نکند، مي توان شرطی به صورت زیر بیان کرد:

عبارت $\int_J [1-s(t)]dt$ به تابع هدف افزوده شود.

با توجه به تعریف v_i و تابع $s(t)$ و با در نظر گرفتن مقادیر مناسب براي وزن‌هاي w_i براي هر قید و با توجه به این که تابع $s(t)$ اکیدا" صعودي است، در صورت افزایش میزان نقض قید (کاهش v_i) مقدار تابع داخل انتگرال کاهش یافته و در نتیجه تابع هدف را افزایش مي‌دهد.

٤- مسائل کنترل بهینه حداقل زمان و مسائل معادل آنها

مسأله کنترل بهینه حداقل زمان در سیستم هاي غیرخطي در حالت کلي به یکي از دو صورت زیر است[10]، [14]:

$$\text{Min } t_f = \int_0^{t_f} 1dt$$

$$\text{s.t}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t),u(t)) \quad , \quad x(t_0)=x_0, y(t_f)=y_f \tag{١٦}$$

$t_f),u(t_f)) = y_f$

که در آن هدف انتقال بردار خروجي $y(t)$ در حداقل زمان به مقدار مطلوب y_f مي‌باشد.

شکل دیگر مسأله کنترل بهینه حداقل زمان به صورت زیر مي باشد:

$$\text{Min } t_f = \int_0^{t_f} 1dt$$

$$\text{s.t.}$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t),u(t)) \quad , \quad x(t_0)=x_0$$

$$y(t_f) = h(x(t_f),u(t_f)) \tag{١٧}$$

که در آن هدف انتقال بردار خروجي $y(t)$ در حداقل زمان به روي منحني (رويه) مطلوب $h(x(t_f),u(t_f))=y(t_f)$ ميباشد. توجه داريم که در اين حالت مقدار نهايي بردار خروجي مشخص نيست، بلکه مثلاً بايد روي يك منحني مشخص قرار گيرد.

با توجه به اينکه فاصله زماني که انتگرال گيري روي آن انجام مي گيرد مشخص نيست، از اين پس مسائل مختلف کنترل بهينه حداقل زمان را به صورت معادل زير تغيير ميدهيم :

$$\text{Min } \; I=\int_0^1 f(t)(\|y(t)-y_f\|^2$$

$$+\|g(x,u,t)\|^2)dt \quad t\in[0,1)$$

s.t.

$$x^{\cdot}(t)=g(x(t),u(t)) \;\;,\;\; x(0)=x_0, x(t_f)=x_f, t_f\le 1$$

(۱۸)

که در آن $f(t)$ تابعي است که روي J به شدت افزايشي ميباشد (مثلاً : $f(t)=e^{\frac{1}{1-t}}$) ، و x_f مقدار بهينه بردار حالت ميباشد، در ادامه روش تعيين آن ارائه خواهد شد. به اين ترتيب در صورتي که $t_f\le 1$ باشد، فاصله زماني انتگرال گيري را به صورت $J=[0,1]$ در نظر ميگيريم. در قضيه زير معادل بودن مسائل بهينه سازي (۱۶) يا (۱۷) با مسأله بهينه سازي (۱۸) بيان ميشود.

قضيه (۵). اگر T لحظهاي باشد که پس از آن تابع حالت در حوالي مقدار مطلوب خود باشد يعني :

$\forall t\ge T: \|x(t)-x_f\|\le\delta$ آنگاه داريم :

$|T-t_f|\le\varepsilon(\delta)$

که در آن : $\lim_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta)=0$

اثبات: واضح است که $T\ge t_f$ زيرا t_f بهينه (کمترين) است. از طرف ديگر اگر $T>t_f$ باشد به اين معني است که در مسأله بهينه سازي (۱۸) تابع حالت ميتوانسته است زودتر به مقدار بهينه خود برسد و اين کار انجام نگرفته، لذا مقدار تابع معيار در مسأله بهينه سازي فوق از مقدار بهينهاي که قابل دسترس بوده بيشتر است که يك تناقض ميباشد، پس بايد رابطه $T=t_f$ برقرار باشد. البته از آنجا که در روش حل با تئوري اندازهها به هرحال مقداري خطا داريم، مقادير T و t_f کمي اختلاف خواهند داشت. يعني: $|T-t_f|<\varepsilon$

براي يکسان سازي دو مسئله حداقل زمان حالت بهينه نهايي را در هر دو تعيين ميکنيم :

روش حل: در اين مسأله چون بردار حالت بهينه نهايي معلوم نيست، با

روش زیر شرایط لازم را به دست می‌آوریم. چون فرض بر وجود جواب برای مسأله کنترل بهینه است، پس مقدار I در مسأله (۱۸) محدود بوده و بنابراین انتگرال $\int_0^1 f(t)(\|y(t)-y_f\|^2+\|g(x,u,t)\|^2)dt$ همگرا است. بنابراین با توجه به تعریف تابع f(t) لازم است که تابع داخل انتگرال فوق در شرایط حدی رابطه زیر را برآورده سازد:

(۱۹)

$$\forall t \ge T : \|y(t)-y_f\|^2+\|g(x,u,t)\|^2=0$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه (۵)، از آن جا که در $t_f \le t \le 1$ تابع حالت تقریباً باید مقداری ثابت و در حوالی x_f باشد، داریم :

(۲۰)

$$\forall t \ge T : \dot{x}(t)=g(x(t),u(t))\approx 0$$

پس با توجه به رابطه (۱۹) در فاصله زمانی $t_f \le t \le 1$ دستگاه غیرخطی زیر را داریم :

(۲۱)

$$\begin{cases} h(x_f,u_f)=y_f \\ g(x_f,u_f)=0 \end{cases}$$

که در آن $x_f=\lim_{t\to 1} x(t)$ و $u_f=\lim_{t\to 1} u(t)$ می‌باشند.

با حل دستگاه غیرخطی فوق حالت بهینه نهایی تعیین می‌شود.

چنانچه جواب دستگاه فوق یکتا نباشد، به ازاء هر یک از جواب‌ها مسأله را حل کرده و حالتی که تابع معیار (۱۸) کوچک‌ترین باشد را انتخاب می‌کنیم.

از این پس در دو مسأله بهینه سازی فوق بردار اولیه حالت و همچنین فاصله انتگرال گیری کاملاً مشخص بوده و می‌توان آن‌ها را به فضای اندازه انتقال داد. در اینجا نیز می توان قید های سخت و نرم را در نظر گرفت، که البته روش کار مشابه حالت قبل است.

٤-١- انتقال مسائل کنترل بهینه حداقل زمان به فضای اندازه.

اگر مشابه حالت قبل یک تبدیل به صورت تبدیل (۳) در نظر بگیریم، در این صورت حل مسأله کنترل بهینه حداقل زمان با تقریب بسیار خوبی به حل یک مسأله برنامه ریزی خطی و با متغیرهای محدود زیر تبدیل می شود:

$$\text{Min} \quad I=\mu(f(t)(\|y(t)-y_f\|^2+\|g(x,u,t)\|^2))$$

$$\text{s.t.}$$

$$\mu(\phi^g)=\Delta\phi$$

$$\mu(\psi_j)=0 \quad , j=1,2,3,\dots,n$$

$$\mu(\theta)=a_\theta$$

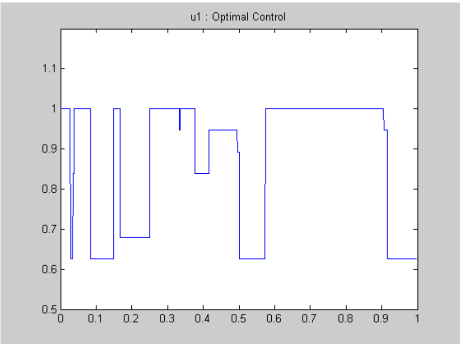
با حل مسأله برنامه ريزي فوق و تعيين α_n ها مي توان تابع قطعه‌اي ثابت كنترل را به دست آورد. براي افزايش دقت، مي توان تعداد توابع منتخب در قيدهاي مسأله (۲۲) را افزايش داد و از طرف ديگر افرازهاي A، U و J را ظريفتر انتخاب كرد.

براي تعيين كارايي الگوريتم دو سيستم غيرخطي را در نظر گرفته و با تعيين تابع كنترل بهينه عملكرد مطلوب اين روش را خواهيم ديد. رسيدن به مقدار نهايي در حداقل زمان و عدم وجود خطا در حالت ماندگار (مدت زماني كه بردار حالت به مقدار نهايي خود بسيار نزديك است يعني فاصله زماني $t_f \le t \le 1$) عملكرد قابل قبول الگوريتم را در اين حالت بيان مي‌كند.

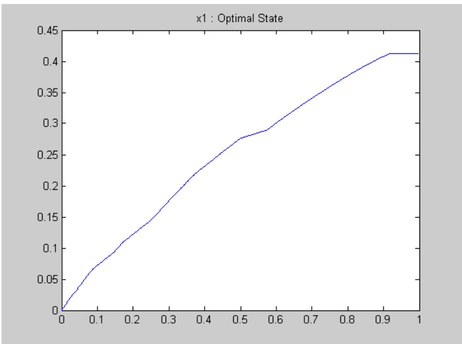
مثال (۱). در اين مثال از تئوري اندازه در مسأله غيرخطي زير كه انتقال بردار خروجي در حداقل زمان مقدار مطلوب $y_f = [0.5\ \ 0.8]$ مي‌باشد استفاده مي شود، از طرف ديگر تابع معيار نيز غيرمحدب مي‌باشد. كارايي الگوريتم در رسيدن سريع و مطلوب مقدار بهينه آن از خواص خوب آن است. معادلات حالت و خروجي سيستم به صورت زير هستند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sin(x_1(t) + x_2(t)) + \sin(u_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \sin(x_1(t) - 2x_2(t)) + u_2 \end{cases}$$

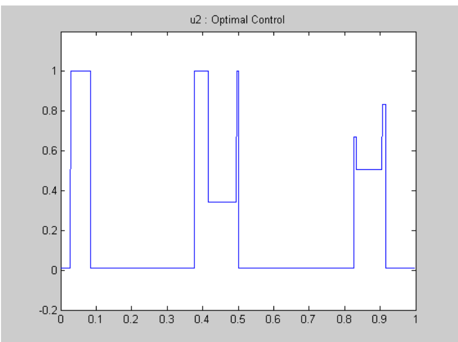
$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \\ y_2(t) = x_2(t) + 2\sin(x_1(t)x_2(t)) \end{cases}$$

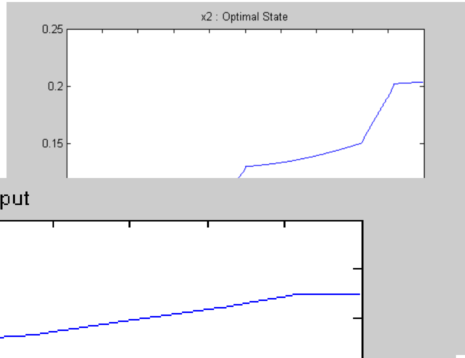


شكل۱ تابع كنترل (اولين متغير) – مثال ۱



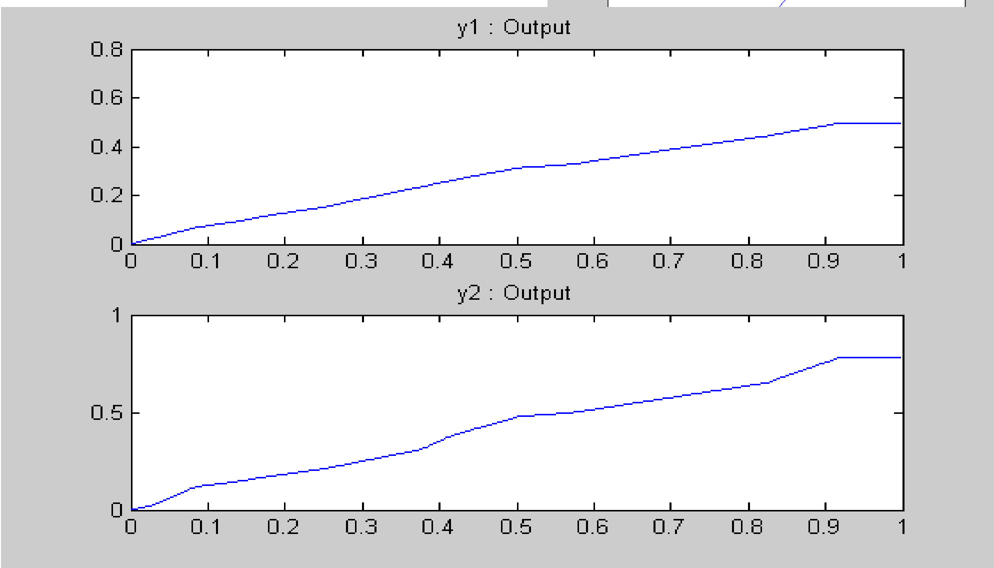
شكل ۲ تابع حالت (اولين متغير) – مثال ۱





شکل ۳ تابع کنترل (دومین متغیر) ــ مثال ۱

شکل ٤ تابع حالت (دومین متغیر) ــ مثال ۱



شکل ۵ خروجي های سیستم و نحوه رسیدن به‌مقادیر مطلوب ــ مثال ۱

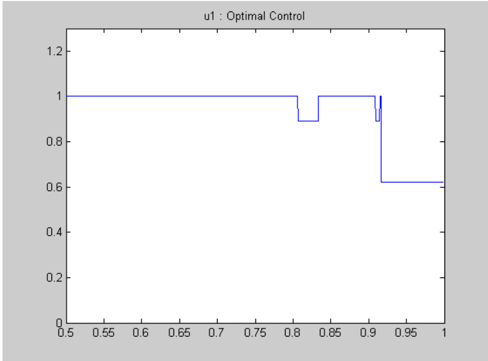
مثال (۲). در این مثال از تئوري اندازه در مسأله غیرخطي زیر که انتقال بردار خروجي در حداقل زمان به منحني مطلوب y_f مي‌باشد، استفاده مي‌شود، از طرف دیگر تابع معیار نیز غیر محدب مي‌باشد. کارایي الگوریتم در رسیدن سریع و مطلوب به منحني بهینه از خواص خوب آن است. معادلات حالت و خروجي به صورت زیر هستند.

$$x_1(t) = -\sin(x_1(t) + x_2(t)) - \sin(u_1(t))$$

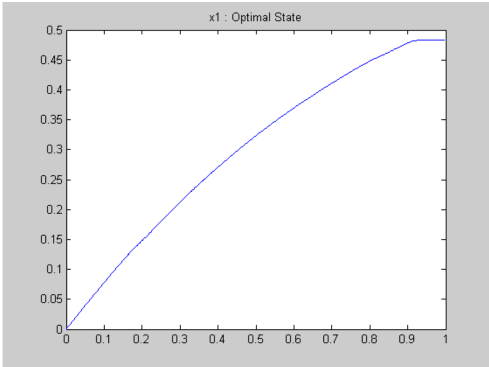
$$x_2(t) = \sin(x_1(t) - 2x_2(t)) + u_2(t)$$

$$y(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}$$

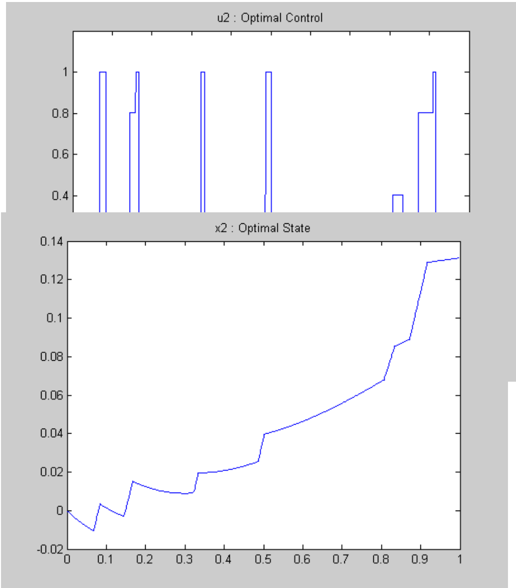
در این مثال هدف انتقال بردار خروجي در حداقل زمان به روي منحني مطلوب $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 0.25$ مي‌باشد.



شکل ٦ تابع کنترل (اولین متغیر) ـ مثال ۲

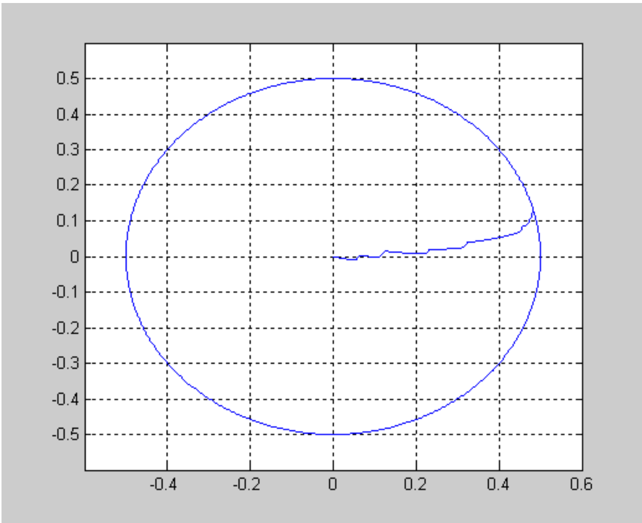


شکل ۷ تابع حالت (اولین متغیر) ـ مثال ۲



شکل ۸ تابع کنترل (دومین متغیر) ـ مثال ۲

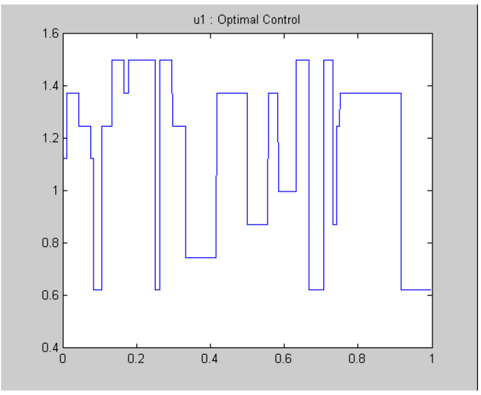
شکل ۹ تابع حالت (دومین متغیر) ـ مثال ۲



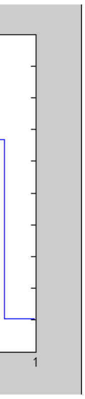
شکل ۱۰ خروجي سیستم و نحوه رسیدن به منحني مطلوب ـ مثال ۲

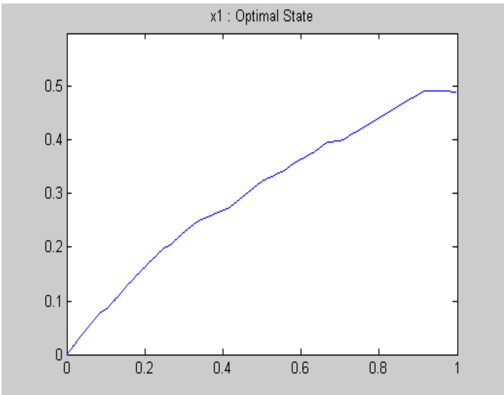
مثال (۳). در این مثال از زیر که انتقال بردار خروجي تئوري اندازه در مسأله غیرخطي در حـــــــــــــــــــــــــــــــــداقل

زمان به منحنی مطلوب y_f می باشد، استفاده می شود؛ در ضمن یك قید سخت دایره ای $\|(x_1,x_2)-(0.28,0)\| \ge 0.12$ نیز وجود دارد. از طرف دیگر تابع معیار نیز غیر محدب می باشد. کارایی الگوریتم در رسیدن سریع و مطلوب به منحنی بهینه و عدم نقض قید از خواص خوب آن است. معادلات حالت و خروجی همان معادلات مثال (۲) هستند. در این مثال هدف انتقال بردار خروجی در حد زمان به روی منحنی مطلوب $x_1^2(t)+x_2^2(t)=0.25$ و عدم نقض قید سخت میباشد.



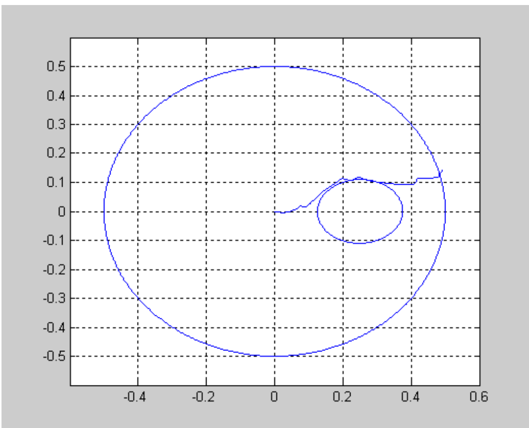
شکل ۱۱ تابع کنترل (اولین متغیر) – مثال ۳

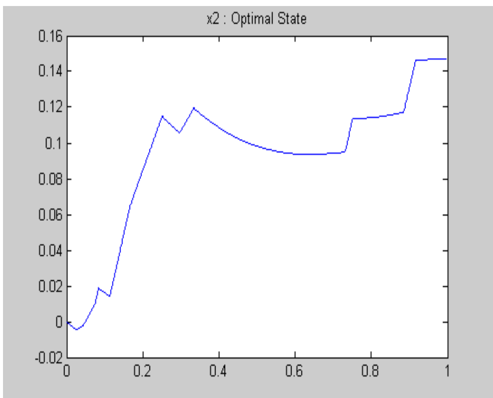




شکل ۱۲ تابع حالت (اولین متغیر) – مثال ۳

شکل ۱۳ تابع کنترل (دومین متغیر) – مثال ۳





شکل ۱۴ تابع حالت (دومین متغیر) ـ مثال ۳ شکل ۱۵ خروجي سیستم و نحوه رسیدن به منحني مطلوب ـ مثال ۳

٥- نتیجه گیري

در این مقاله، نخست برای بررسي کنترل پذیري سیستم هاي غیرخطي همراه با قیدهاي سخت و نرم و سپس برای حل مسائل مختلف حداقل زمان در کنترل بهینه از تئوري اندازه استفاده شد. مسائل یاد شده به مسائل کنترل بهینه غیر خطي با افق محدود تبدیل شد. فاصله زماني که در مسأله حداقل زمان در ابتدا یك مجموعه غیر مشخص ميباشد، با تغییري مناسب و با تعیین مسأله معادل به فاصله [0,1] تبدیل شد و با بیان یك قضیه مسأله معادل بودن آن ها اثبات گردید. مجهول بودن حالت نهایي نیز نکته دیگري است که براي رفع آن قبل از حل مسأله برنامه ریزي خطي فوق باید محاسباتي برای تعیین (بردار) حالت بهینه نهایي انجام شود. با استفاده از تابع کنترل به دست آمده که قطعه اي ثابت است، مي توان تابع خروجي را به مقدار مطلوب رسانید. سرانجام، با ارائه نتایج شبیه سازي توانمندي روش برای بررسي کنترل پذیري و کنترل حداقل زمان در سیستم هاي غیرخطي، نشان داده شد.

٦- مراجع

1. S.A. Alavi, A.V. Kamyad, M. Gachpazan, “Solving Nonlinear Ordinary Differential Equation as a Control Problem by Using Measure Theory”, Scientia Iranica, Vol. 7, No. 1, pp 1-7, (2000).
2. S.A. Alavi, A.V. Kamyad, M.H. Farahi, “Optimal Control of an Inhomogeneous Heat Problem by Using Measure Theory ”, Iranian, Int, J. Sci, Vol. 4, No. 1, (2000).
3. G. Barra, “Measure Theory And Integration”, John Willy and Sons, (1981).
4.S. Effati, A.V. Kamyad, R.A. KamyabiGol, “The infinite - horizon optimal control problems”, Journal for Analysis and its App., vol. 19., No. 1, pp 269-278, (2000).
5. S. Effati, A.V. Kamyad, M.H. Farahi, “A New Method for Solving The Nonlinear Second - order Boundary value Differential Equations”, Korean J. Comput. & Appl. Math., vol. 7., No.1, pp.183-193, (2000).

6. S. Effati, A.V. Kamyad, “Solution of Boundary value Problems for linear second Order ODE's by Using Measure Theory” , The Journal of Analysis, vol. 6, pp 139-149, (1998).

7. M.H. Farahi, J.E. Rubio, D.A. Wilson, “The Optimal Control of the Linear Wave Equation”, Int. J. Control Vol 63, No. 5, pp. 833 - 848, (1995).

8. S.I. Gass, “Linear Programming”, McGraw - Hill, New York, (1985).

9. A.V Kamyad, J.E. Rubio, D.A. Wilson, “Optimal Control of Multidimensional Diffusion, J. of optimization Theory and Applications”, 70, pp.191 - 209, (1991).

10. L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, “The Mathematical Theory of Optimal Process , Wiley Intrescience”, New York, (1962).

11. H.L. Royden, “Real Analysis , The Macmillan Company”, New York, (1963).

12. J.E Rubio, “Control and Optimization: The Linear Treatment of Nonlinear Problems”, Manchester University Press, (1986).

13. J.E Rubio, “The Global Control of Nonlinear Elliptic Equations , J. of Franklin Institue”, 330, pp.29 - 35, (1993).

14. W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, Mathematics University of Wisconsin, Madison, (1966).

15. A.P. Sage, C. White, “Optimum Systems Control”, Prentice - Hall, (1977).

16. D.A. Wilson, J.E Rubio, “Existence of Optimal Control foe the Diffusion Equation, J. of Optimization: Theory and its Application”, 22, pp. 91-100, (1977).

۱۷. زارع آصف، خاكي صديق علي، وحيديان كامياد علي،”كاربرد تئوري اندازه در حل مسائل كنترل بهينه غيرخطي با افق بي نهايت“، هشتمين كنفرانس مهندسي برِق ايران، دانشگاه صنعتي اصفهان، (۱۳۷۹).

۱۸. زارع آصف، وحيديان كامياد علي، خاكي صديق علي،”كاربرد تئوري اندازه در كنترل پذيري سيستم هاي غيرخطي گسسته“، دومين سمينار جبر خطي و كاربردهاي آن، دانشگاه خليج فارس، (۱۳۷۹).

۱۹. زارع آصف، خاكي صديق علي، وحيديان كامياد علي،”كاربرد تئوري اندازه در حل مسائل كنترل بهينه گسسته با افق بي نهايت“، دومين كنفرانس بين المللي رياضيات كاربردي (ICAM2000) ، دانشگاه علم وصنعت، (۱۳۷۹).

۲۰. زارع آصف، خاكي صديق علي، وحيديان كامياد علي، ”حل مسأله كنترل بهينه گسسته با استفاده از تئوري اندازه“، اولين كنفرانس بهينه سازي و كاربردهاي آن ، دانشگاه فردوسي مشهد، (۱۳۷۷).

۲۱. شاطريان محمد رضا،”كاربرد تئوري اندازه در كنترل بهينه سيستم هاي فشرده و پارامتر توزيعي“"، پايان نامه كارشناسي ارشد، دانشگاه فردوسي، (۱۳۷۳).

۲۲. خاكي صديق علي،”اصول كنترل مدرن“، انتشارات دانشگاه تهران، (۱۳۷۴).